



TITLE:

Big and Small Spreading Phenomena for  
Free Boundary Problems of Spruce  
Budworm Models (Reconsideration of the  
method of estimates on partial differential  
equations from a point of view of the theory  
on abstract evolution equations)

AUTHOR(S):

河合, 優佑

---

CITATION:

河合, 優佑. Big and Small Spreading Phenomena for Free Boundary Problems of Spruce Budworm Models  
(Reconsideration of the method of estimates on partial differential equations from a point of view of the theory on  
abstract evolution equations). 数理解析 ...

ISSUE DATE:

2016-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/224500>

RIGHT:

# Big and Small Spreading Phenomena for Free Boundary Problems of Spruce Budworm Models

早稲田大学大学院・基幹理工学研究科 河合 優佑 (かわい ゆうすけ)

YUSUKE KAWAI

Department of Pure and Applied Mathematics,  
Waseda University

## 1 序.

外来種の侵入・拡散を再現する生態系モデルとして、次のような自由境界問題を考える：

$$(FBP) \quad \begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u), & t > 0, 0 < x < h(t), \\ u_x(t, 0) = u(t, h(t)) = 0, & t > 0, \\ h'(t) = -\mu u_x(t, h(t)), & t > 0, \\ h(0) = h_0, u(0, x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq h_0. \end{cases}$$

$u = u(t, x)$  は生物の個体数密度,  $h = h(t)$  は自由境界の座標,  $d, \mu$  そして  $h_0$  は正定数である. 反応項  $f = f(u)$  は  $[0, \infty)$  上で局所 Lipschitz 連続かつ,

$$f(0) = 0, \quad \exists K \text{ s.t. } f(K) = 0 \text{ and } f(u) < 0 \text{ for } u > K \quad (1.1)$$

なる条件をみたすものとし, 初期値  $u_0 = u_0(x)$  は

$$u_0 \in C^2[0, h_0] \text{ with } u'_0(0) = u(h_0) = 0 \text{ and } u_0 > 0 \text{ in } (0, h_0) \quad (1.2)$$

なる関数とする. 1 次元領域の左端  $x = 0$  では斉次 Neumann 条件を課し, 生物の出入りが無いものとする. 自由境界の挙動は, その速度が  $x = h(t)$  における個体数圧に比例するという Stefan 条件:  $h'(t) = -\mu u_x(t, h(t))$  に従うものとする. このような自由境界問題は 2010 年に Du-Lin [2] によって導入され, 反応項を logistic 関数:  $f(u) := (a - bu)u$  としたものをはじめ, 近年様々な種類の自由境界問題が研究されている.

$f$  が局所 Lipschitz 連続かつ (1.1) をみたすならば, (FBP) は有界な古典大域解  $(u, h)$  を持つことが示される (Theorem 1). したがって,  $t \rightarrow \infty$  としたときの大域解の漸近挙動の解析が大きな目標となる.

**Definition 1.** (FBP) の解  $(u, h)$  の挙動について次のように定義する：

- (I) *Vanishing*:  $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t, \cdot)|_{C[0, h(t)]} = 0$ ;
- (II) *Spreading*:  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$  and  $\liminf_{t \rightarrow \infty} |u(t, \cdot)|_{C[0, h(t)]} > 0$ .

生物学的に Vanishing は外来種の侵入・拡散の失敗, Spreading は成功を意味する. 漸近挙動は反応項  $f$  に強く依存する.  $f$  が monostable 型 (e.g. logistic 関数) の場合は Du-Lin [2] によって Vanishing または Spreading のみが起こるという二者択一定理が得られている. また,  $f$  が bistable 型 (e.g.  $f(u) := u(u - \theta)(1 - u)$  with  $0 < \theta < 1/2$ ) の場合には Vanishing, Spreading または Transition (Vanishing と Spreading の中間の特殊な現象) が起こるという三者択一定理が Du-Lou [3] によって得られている.

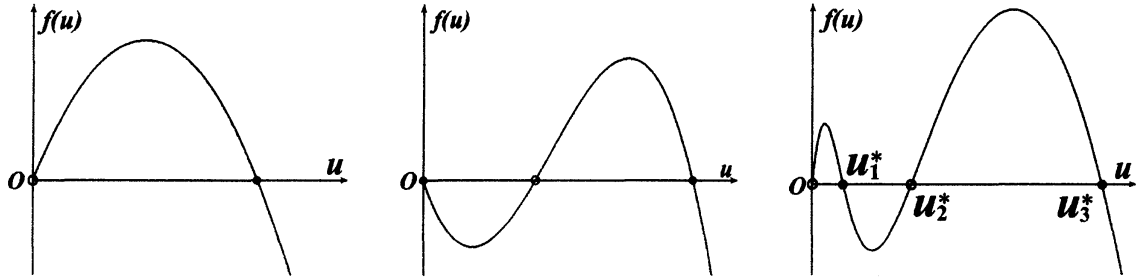


図 1: monostable 型

図 2: bistable 型

図 3: positive bistable 型

本研究では, (FBP) の反応項として次のものを採用する:

$$f(u) := (a - bu)u - \frac{u^2}{1 + u^2}. \quad (1.3)$$

$a$  と  $b$  は正定数とし, それぞれ内的増加率, 内的競争率と呼ばれている. この非線形項は北アメリカの森に生息するトウヒノシントメハマキガ (Spruce Budworm) の生態系モデルとして Ludwig et al. [12] によって考案され, 長い研究の歴史がある. 反応項は logistic 項と, Holling によって提唱された I, II, III 型の捕食率のうち, III 型を用いて構成されている. III 型は次の 2 つの仮定が考慮されている:

- (1) 被食者の個体数が多い場合, 捕食者が“満腹”となり捕食率は飽和状態に近づく.
  - (2) 被食者の個体数が少ない場合, 被食者が“隠れ家”に隠れる等して捕食を免れる.
- I 型は単に“捕食率が生物の個体数に比例する”としたもので, II 型は捕食者の“満腹”のみが仮定されたものである. 反応項 (1.3) は, パラメータ  $a$  と  $b$  によって大きく 3 つの形状に分類される:

- (i) small monostable:  $f(u) = 0$  は正値解として小さな  $u_1^* > 0$  のみを持つ.
  - (ii) big monostable:  $f(u) = 0$  は正値解として大きな  $u_3^* > 0$  のみを持つ.
  - (iii) positive bistable:  $f(u) = 0$  は 3 つの正値解  $u_1^*, u_2^*, u_3^*$  with  $u_1^* < u_2^* < u_3^*$  を持つ.
- (i) と (ii) は Du-Lin [2] による monostable 型と同様の結果が得られるので, 今回は (iii) の positive bistable 条件を満たす場合のみに焦点を当てて議論する. 以下,  $f$  は次の条件を満たすものとする:

(PB)  $f$  is given by (1.3),  $f(u) = 0$  has solutions  $0, u_1^*, u_2^*, u_3^*$  and  $\int_{u_1^*}^{u_3^*} f(u) du > 0$ .

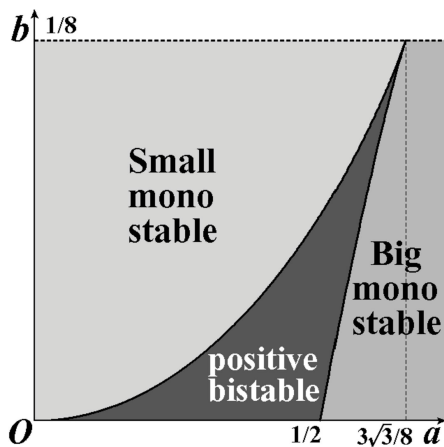


図 4: (1.3) のパラメータ相平面

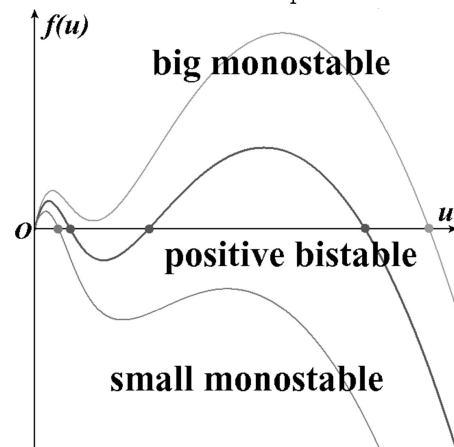


図 5: 各パラメータ条件における (1.3) の概形

**Remark 1.1. (PB)** において常微分方程式を考えた場合, 4つの平衡点  $0, u_1^*, u_2^*, u_3^*$  のうち  $u_1^*$  と  $u_3^*$  のみが安定となる. 生物学的に,  $u_1^*$  は生物が隠れ家にひっそりと身を潜めている状態,  $u_3^*$  は生物が大発生している状態を意味する.

**Remark 1.2.** 反応項 (1.3) は (1.1) with  $K = u_3^*$  をみたすので, 大域解の存在定理 (Theorem 1) より, (FBP) の各初期値  $(u_0, h_0)$  に対する大域解  $(u, h)$  の一意存在は保証されている.

**Remark 1.3.** Holling I 型:  $f(u) = (a - bu)u - u$  は monostable 型, Holling II 型:  $f(u) = (a - bu)u - u/(1 + u)$  は bistable 型に分類され, 先行研究と同様の結果が得られる.

## 1.1 主結果.

この小節では (FBP) について, **(PB)** を仮定して主結果を述べる. 以下,  $(u_0, h_0)$  を初期値とする (FBP) の解を  $(u, h; u_0, h_0)$  と表記する.  $t \rightarrow \infty$  における漸近挙動の択一定理として, 次の四者択一定理が得られる:

**Theorem I (四者択一定理).** **(PB)** を仮定する. このとき, (FBP) の任意の解  $(u, h)$  について次の (I)-(IV) のいずれかが成り立つ:

- (I) *Vanishing*:  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \leq (\pi/2)\sqrt{d/a}$  and  $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t, \cdot)|_{C[0, h(t)]} = 0$ ;
- (II) *Small spreading*:  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$  and  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = u_1^*$  locally uniformly in  $[0, \infty)$ ;
- (III) *Big spreading*:  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$  and  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = u_3^*$  locally uniformly in  $[0, \infty)$ ;
- (IV) *Middle spreading*:  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$  and  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = v_{dec}(x)$  locally uniformly in  $[0, \infty)$ ,  
ただし  $v_{dec}$  は次の問題の単調減少な正值解である;  $dv'' + f(v) = 0$  for  $x > 0$ ,  $v'(0) = 0$ .

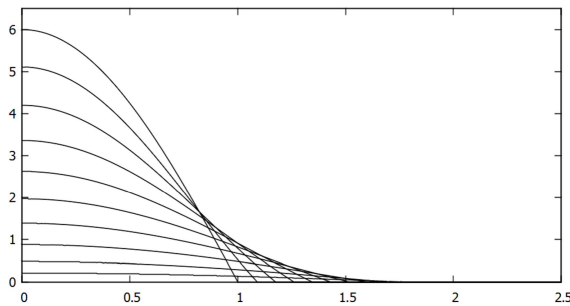


図 6: Vanishing

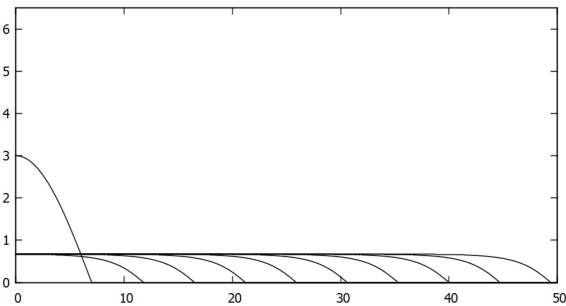


図 7: Small spreading

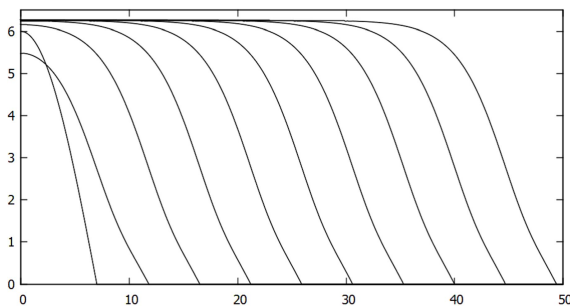


図 8: Big spreading ( $\mu < \mu^*$ )

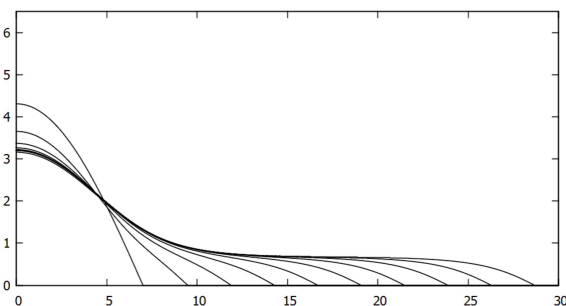


図 9: Middle spreading

Theorem I の漸近挙動に対する十分条件として, 次の結果が得られる:

**Theorem II** (漸近挙動に対する十分条件).  $(u, h; u_0, h_0)$  を (FBP) の解とし, (PB) を仮定する. このとき, 次の (i)-(iii) が成り立つ:

- (i)  $h_0 < (\pi/2)\sqrt{d/a}$  とする. このとき,
  - (a)  $u_0(x) \leq V^*(x)$  in  $[0, h_0]$  ならば, *Vanishing* が起こる. ただし,  $V^*$  は  $[0, h_0]$  上の正値関数とする.
  - (b)  $|u_0|_{L^1(0, h_0)} \geq \frac{d}{\mu} \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{d}{a}} - h_0 \right) \max \left\{ 1, \frac{|u_0|_{C[0, h_0]}}{u_1^*} \right\}$  ならば *Spreading* が起こる.
- (ii)  $h_0 \geq (\pi/2)\sqrt{d/a}$  とする. このとき, *Spreading* が起こる. さらに,
  - (a)  $|u_0|_{C[0, h_0]} < u_2^*$  ならば, *Small spreading* が起こる.
  - (b)  $|u_0|_{L^1(0, h_0)} < u_2^* \sqrt{\pi d / (2ea)}$  ならば, *Small spreading* が起こる.
- (iii)  $h_0 \geq \ell^*$  with some  $\ell^* > 0$  とする. このとき,  $\ell \in [\ell^*, h_0]$  がとれて,  $u_0(x) \geq q_2(x; \ell)$  in  $[0, \ell]$  が成り立つならば, *Big spreading* が起こる. ただし,  $q_2$  は次の問題の 2 番目に小さな正値解とする;  $dq'' + f(q) = 0$  for  $0 < x < \ell$  with  $q'(0) = q(\ell) = 0$ .

次に, (1.2) を満たすような  $(u_0, h_0)$  を固定し,  $(\sigma u_0, h_0)$  を初期値とする (FBP) $_{\sigma}$  を考える. ただし,  $\sigma$  は正のパラメータとする. もちろん  $\sigma u_0$  も (1.2) を満たすので, (FBP) $_{\sigma}$  も大域解を一意に持ち, その漸近挙動は  $\sigma$  に依存する. このとき, 次の定理のように漸近挙動に対する閾値  $\sigma_1^*$  と  $\sigma_2^*$  の存在が示され, Middle spreading が Small と Big spreading の中間の特異な現象であることがわかる.

**Theorem III** (漸近挙動に対する閾値). (PB) と (1.2) を仮定し,  $(\sigma u_0, h_0)$  を初期値とする (FBP) の解を考える. このとき,  $(u_0, h_0)$  に依存する定数  $\sigma_1^* \in [0, \infty]$  が存在して,  $0 \leq \sigma \leq \sigma_1^*$  ならば *Vanishing*,  $\sigma_1^* < \sigma$  ならば *Spreading* が起こる. とくに,  $(\pi/2)\sqrt{d/a} - \mu u_1^* |u_0|_{L^1(0, h_0)} / (d |u_0|_{C[0, h_0]}) \leq h_0$  ならば  $\sigma_1^* < \infty$ ,  $h_0 < (\pi/2)\sqrt{d/a}$  ならば  $\sigma_1^* > 0$ ,  $h_0 \geq (\pi/2)\sqrt{d/a}$  ならば  $\sigma_1^* \equiv 0$  である. さらに,  $h_0 \geq \max\{(\pi/2)\sqrt{d/a}, \ell^*\}$  ならば  $(u_0, h_0)$  に依存する定数  $\sigma_2^* \in (0, \infty)$  が存在して,  $\sigma_1^* \equiv 0 < \sigma < \sigma_2^*$  ならば *Small spreading*,  $\sigma = \sigma_2^*$  ならば *Middle spreading*,  $\sigma_2^* < \sigma$  ならば *Big spreading* が起こる.

漸近 Spreading speed に関する結果を述べる. Spreading が起こるとき,  $t \rightarrow \infty$  のときの漸近 Spreading speed や  $u$  の漸近形状を知る上で, 次の問題の解析が重要である:

$$(SWP) \quad \begin{cases} dq_{zz} - cq_z + f(v) = 0, & z > 0, \\ q(0) = 0, q(\infty) = u^*, q(z) > 0, & z > 0, \\ \mu q_z(0) = c. \end{cases}$$

Small spreading を解析する際には  $u^* = u_1^*$ , Big spreading を解析する際には  $u^* = u_3^*$  としたものを解析する. この (SWP) がどのように導出されるかを示す. まず,  $v(t, z) = u(t, h(t) - x)$  とすれば, (FBP) から次の問題が導かれる:

$$\begin{cases} v_t = dv_{zz} - h'(t)v_z + f(q), & t > 0, 0 < z < h(t), \\ v(t, 0) = v_z(t, h(t)) = 0, & t > 0, \\ h'(t) = \mu v_z(t, 0), & t > 0, \\ h(0) = h_0, v(0, x) = u_0(h_0 - x), & 0 \leq x \leq h_0. \end{cases}$$

Spreading が起こる場合には  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$  であることに注意して,  $t \rightarrow \infty$  としたときに  $h'(t)$  と  $v(t, z)$  がそれぞれ定数  $c$  と  $[0, \infty)$  上の正值関数  $q = q(z)$  に収束することを仮定すれば, この問題から (SWP) が導かれる.

(SWP) の解 Semi-wave の存在に関する次の定理が成り立つ:

**Theorem IV (Semi-wave の存在).** (PB) を仮定する. このとき, (SWP) with  $u^* = u_1^*$  は各  $\mu > 0$  に対して一意解  $(c, q) = (c_S^*, q_S^*)$  を持つ. さらに, 次の Case A または B のいずれかが成り立つ:

**Case A:** (SWP) with  $u^* = u_3^*$  は各  $\mu > 0$  に対して一意解  $(c, q) = (c_B^*, q_B^*)$  を持つ.

**Case B:** 正定数  $\mu^*$  が存在して, (SWP) with  $u^* = u_3^*$  は各  $\mu < \mu^*$  に対して一意解  $(c, q) = (c_B^*, q_B^*)$  を持ち,  $\mu > \mu^*$  に対して解を持たない.

各 Spreading 現象の漸近 Spreading speed ついて次の定理が成り立つ:

**Theorem V (漸近 Spreading speed).** (PB) を仮定する.  $c_S^*, c_B^*, \mu^*$  を Theorem IV で得られた定数とする. このとき, Small または Middle spreading が起こるならば,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{t} = c_S^*(\mu) \text{ for each } \mu > 0 \text{ and } c_S^*(\mu) \nearrow c_0^S \text{ as } \mu \rightarrow \infty.$$

Big spreading が起こるならば, 次の Case A または B のいずれかが成り立つ:

$$\text{Case A: } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{t} = c_B^*(\mu) \text{ for each } \mu > 0 \text{ and } c_B^*(\mu) \nearrow c_0^B \text{ as } \mu \rightarrow \infty.$$

$$\text{Case B: } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{t} = \begin{cases} c_B^*(\mu) & \text{for each } \mu < \mu^* \text{ and } c_B^*(\mu) \nearrow c_S^*(\mu^*) \text{ as } \mu \nearrow \mu^*, \\ c_S^*(\mu) & \text{for each } \mu > \mu^*. \end{cases}$$

ただし,  $c_0^S$  と  $c_0^B$  は Theorem VI で得られる正定数とする. さらに,

**Case A (resp. B):**  $c_S^*(\mu) < c_B^*(\mu)$  for  $\mu > 0$  (resp.  $\mu < \mu^*$ ).

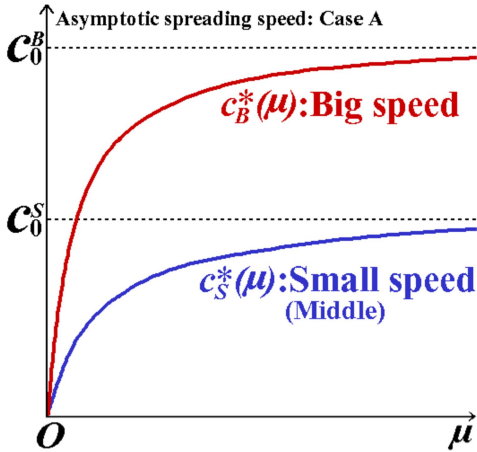


図 10: Case A

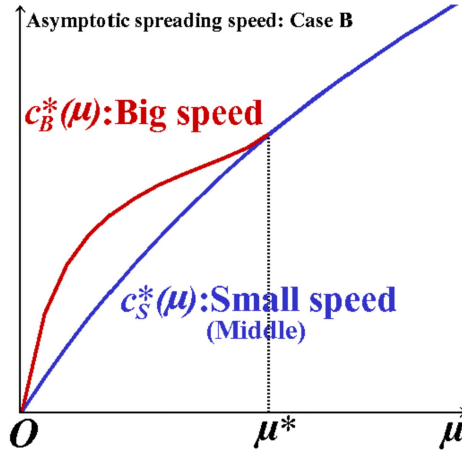


図 11: Case B

**Remark 1.4.** Middle spreading は bistable 型や combustion 型:  $f \in C^1$ ;  $f(u) = 0$  in  $[0, \theta]$ ;  $f(u) > 0$  in  $[\theta, 1]$ ;  $f'(1) < 0$ ;  $f(u) < 0$  in  $[0, \infty)$  の反応項を用いた (FBP) における Transition という現象に対応している. Du-Lou-Zhou [4] によれば, Transition が起こると仮定すると, bistable 型においては  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)/\log t = c^*$ , combustion 型においては  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)/\sqrt{t} = c^*$  なる結果が示されている.

## 1.2 一般の自由境界問題に対する先行研究と主要な定理.

この小節では、先行研究によって得られた主要な定理を述べる。まず、古典大域解の一意存在と有界性について、次の定理が知られている：

**Theorem 1** (古典大域解の一意存在と有界性 [7, Theorem 1]).  $f = f(u)$  は  $[0, \infty)$  上で局所 Lipschitz 連続な関数で (1.1) をみたし、初期関数  $u_0 = u_0(x)$  は (1.2) をみたすものとする。このとき、任意の  $\alpha \in (0, 1)$  と  $t > 0$  に対して、(FBP) は一意解

$$(u, h) \in C^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha} \left( \bigcup_{t \geq 0} (\{t\} \times [0, h(t)]) \right) \times C^{1+\frac{\alpha}{2}}[0, \infty)$$

を持つ。さらに、定数  $C_1^*$  と  $C_2^*$  が存在して、

$$0 < u(t, x) \leq C_1^*, \quad 0 < h'(t) \leq \mu C_2^* \quad \text{for } t > 0, x \in (0, h(t)).$$

ただし、 $C_1^*$  と  $C_2^*$  はそれぞれ  $|u_0|_{C[0, h_0]}$  と  $|u_0|_{C^1[0, h_0]}$  のみに依存する正定数である。

この定理から、自由境界  $h(t)$  は後退することなく前進し、その極限は有界か無限であることがわかる。生物学的に定数  $K$  は生物の環境容量を意味し、通常の生態系モデルの反応項は (1.1) をみたす。

漸近挙動の解析の際に有効な定理として、比較定理, Vanishing, Spreading に対する十分条件が示されている。まず、比較定理を述べる：

**Theorem 2** ((FBP) に対する比較定理 [7, Lemma 3]).  $(u, h; u_0, h_0)$  を (FBP) の解,  $\Omega_1 := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t \leq T, 0 \leq x \leq \bar{h}(t)\}$  とし,  $\bar{h} \in C^1[0, T]$  と  $\bar{u} \in C(\bar{\Omega}_1) \cap C^{1,2}(\Omega_1)$  は

$$\begin{cases} \bar{u}_t - d\bar{u}_{xx} - f(\bar{u}) \geq 0, & (t, x) \in \Omega_1, \\ \bar{u}_x(t, 0) \geq 0, \quad \bar{u}(t, \bar{h}(t)) = 0, & t \in (0, T], \\ \bar{h}'(t) \geq -\mu \bar{u}_x(t, \bar{h}(t)), & t \in (0, T] \end{cases} \quad (1.4)$$

をみたすものとする。さらに、 $\Omega_2 := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t \leq T, 0 \leq x \leq \underline{h}(t)\}$  とし,  $\underline{h} \in C^1[0, T]$  と  $\underline{u} \in C(\bar{\Omega}_2) \cap C^{1,2}(\Omega_2)$  を (1.4) における “ $\geq$ ” と “ $\Omega_1$ ” をそれぞれ “ $\leq$ ” と “ $\Omega_2$ ” で置き換えた条件をみたすものとする。このとき、

$$\underline{h}(0) \leq h_0 \leq \bar{h}(0) \quad \text{and} \quad \underline{u}(0, x) \leq u_0(x) \leq \bar{u}(0, x) \quad \text{in } [0, h_0]$$

ならば、

$$\begin{aligned} \underline{h}(t) &\leq h(t) \leq \bar{h}(t) \quad \text{in } [0, T], \\ \underline{u}(t, x) &\leq u(t, x) \quad \text{in } (t, x) \in \bar{\Omega}_2, \quad u(t, x) \leq \bar{u}(t, x) \quad \text{in } (t, x) \in \bar{\Omega}_1. \end{aligned}$$

**Remark 1.5.** (1.4) の条件式  $\bar{u}_x(t, 0) \geq 0$  (resp.  $\underline{u}_x(t, 0) \leq 0$ ) for  $t \in (0, T]$  を

$$\bar{u}(t, L) \geq u(t, L) \quad (\text{resp. } \underline{u}(t, L) \leq u(t, L)) \quad \text{for } L \leq h_0 \quad (\text{resp. } \underline{h}(0)) \quad \text{and } t \in (0, T]$$

としても良い。

次のように優解と劣解を定義する：

**Definition 2.** Theorem 2における  $(\bar{u}, \bar{h})$  を (FBP) の優解,  $(\underline{u}, \underline{h})$  を劣解とする.

適切に優・劣解を構成することで, 解の漸近挙動を解析することができる. その際に通常の比較定理と異なり, 関数  $u$  だけでなく,  $(u, h)$  の組に対する優・劣解を構成しなければならない.

Vanishing に対する十分条件として, 次のような簡潔かつ有用な結果が得られている：

**Theorem 3** ([7, Theorem 2]).  $(u, h)$  を (FBP) の解とする. このとき,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) < \infty$  ならば Vanishing が起こる：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t, \cdot)|_{C[0, h(t)]} = 0.$$

Spreading に対する十分条件が得られている：

**Theorem 4** ([7, Theorem 3]).  $(u, h; u_0, h_0)$  を (FBP) の解とし,  $q = q(x; \ell)$  を楕円型問題

$$(IP) \quad \begin{cases} dq'' + f(q) = 0, & 0 < x < \ell, \\ q'(0) = q(\ell) = 0, \quad q(x) > 0, & 0 < x < \ell \end{cases}$$

の解とする. ただし,  $\ell$  は正定数とする. このとき,  $h_0 \geq \ell$  かつ  $u_0(x) \geq q(x; \ell)$  in  $[0, \ell]$  ならば,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty \quad \text{and} \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} u(t, x) \geq v^*(x) \quad \text{for } x \geq 0.$$

ただし,  $v^*$  は楕円型問題

$$(SP) \quad \begin{cases} dv'' + f(v) = 0, & x > 0, \\ v'(0) = 0, \quad v(x) \geq 0, & x > 0 \end{cases}$$

の解で,  $v^*(x) \geq q(x)$  in  $[0, h_0]$  をみたす最小のものとする.

### 1.3 (IP) と (SP) の解析.

Theorem 4 を用いる際に, 反応項 (1.3) に対する (IP) と (SP) の解析が重要である. この小節では (PB) を仮定し, shooting method を用いて得られる (IP) と (SP) の解の存在定理を述べる ([11, 12] を参照).  $vv'$ -phase plane 上で境界条件をみたす軌道を読み取れば, (SP) の解の概形を得ることができる. また, (IP) の解の取りうる最大値  $w := |q|_{C[0, \ell]}$  は境界の幅  $\ell$  に依存し, time map を用いるとその対応関係を読み取ることができる (より詳細な解析は [13, 14] を参照).

**Definition 3.** 次の関数を time map と定義する：

$$\ell(w) = \sqrt{\frac{d}{2}} \int_0^w \frac{dv}{\sqrt{F(w) - F(v)}}.$$

ただし,  $F(u) := \int_0^u f(v) dv$  とする.



この time map から, (IP) の解  $q$  の最小の零点  $\ell$  が  $q$  の  $x=0$  における値  $w$  (実際, この  $w$  が  $q$  の最大値となる) の関数として表されることがわかる. 逆に考えれば, 解軌道は  $\ell$  に依存するということである. 参考までに, small と big monostable における time map と  $vv'$ -phase plane は次のようになる:

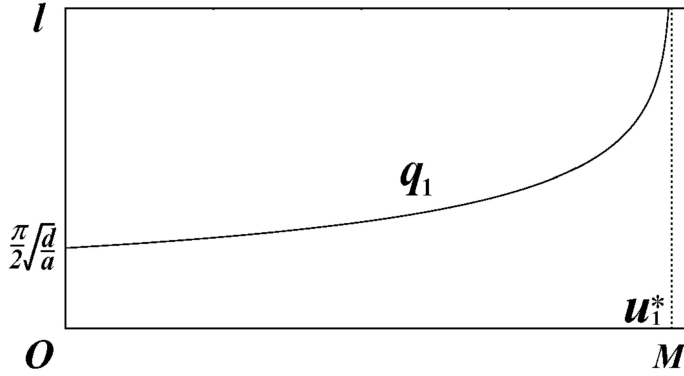


図 12: small monostable における time map

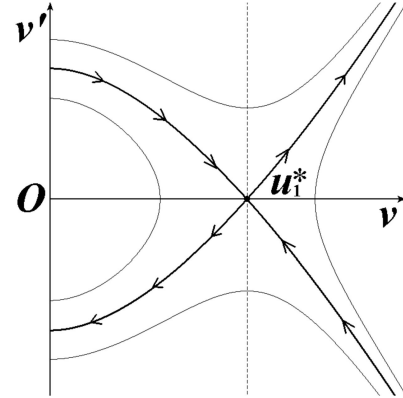


図 13: phase plane

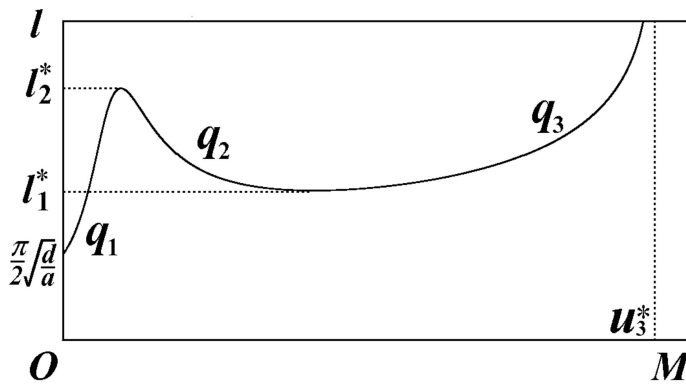


図 14: big monostable における time map

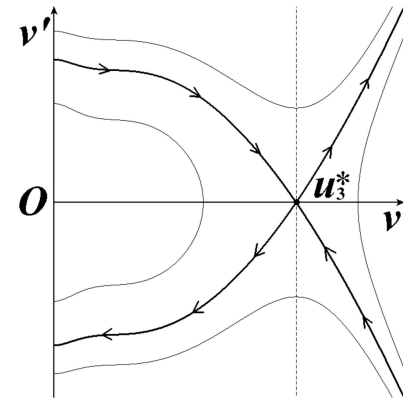


図 15: phase plane

(PB) において  $\hat{u}_* \in (u_2^*, u_3^*)$  を  $\int_{u_1^*}^{\hat{u}_*} f(u)du = 0$  となる点とする. (PB) における time map の定義域は  $[0, u_1^*) \cup (\hat{u}^*, u_3^*)$  となり, その概形と phase plane は次のようになる:

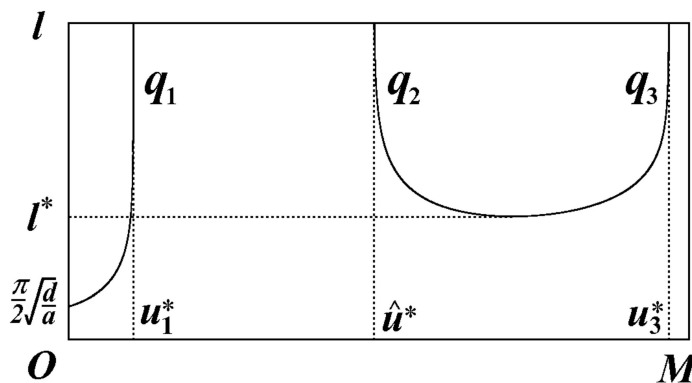


図 16: (PB) における time map

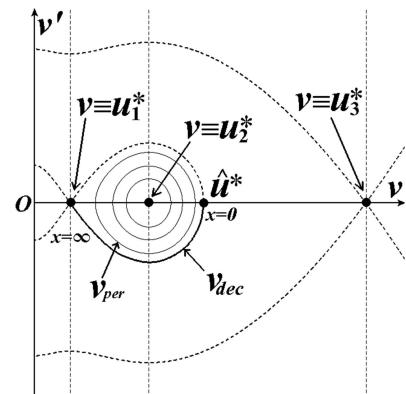


図 17: (PB) における phase plane

*Remark 1.6.* time map における  $(\pi/2)\sqrt{d/a}$  と  $l^*$  の大小関係について, 数値計算によれば  $(\pi/2)\sqrt{d/a} < l^*$  であると推測できるが, 証明は得られていない.

以上の解析により, (IP) と (SP) の解の存在について次のような結果が得られる:

**Theorem 5 ((IP) の解の存在).** (PB) を仮定し,  $q_i = q_i(x; \ell)$ ,  $i = 1, 2, 3$  を (IP) の解とする. このとき, 正定数  $\ell^* := \inf_{\hat{u}^* < M < u_3^*} \ell(M)$  が存在して, (IP) は  $\ell \in ((\pi/2)\sqrt{d/a}, \infty)$  に対して正値解  $q_1$ ,  $\ell \in [\ell^*, \infty)$  に対して  $q_2$  と  $q_3$  を持つ. さらに, 各  $\ell$  に対して  $|q_1|_{C[0, \ell]} < u_1^*$  かつ  $\hat{u}^* < |q_2|_{C[0, \ell]} \leq |q_3|_{C[0, \ell]} < u_3^*$  であり,  $\ell = \ell^*$  ならば  $q_2 \equiv q_3$  である.

**Theorem 6 ((SP) の解の存在).** (PB) を仮定し,  $v = v(x)$  を (SP) の解とする. このとき, (SP) は 4 つの定数解  $v \equiv 0, u_1^*, u_2^*, u_3^*$ , 一意の単調減少な解  $v = v_{dec}(x)$  s.t.,  $v_{dec}(0) = \hat{u}^*$  and  $\lim_{x \rightarrow \infty} v_{dec}(x) = u_1^*$ , そして周期解  $v = v_{per}(x)$  s.t.,  $u_1^* < \min_{x \geq 0} v_{per}(x) < u_2^* < \max_{x \geq 0} v_{per}(x) < \hat{u}^*$  を無数に持つ.

## 2 漸近挙動について.

この節では (PB) を仮定し, 漸近挙動に対する主結果 Theorems I-III の証明を述べる.

### 2.1 四者択一定理.

この小節では, 四者択一定理 (Theorem I) の証明の概要を述べる. そのために, 幾つかの命題と補題を準備する.

**Proposition 2.1.**  $(u, h)$  を (FBP) の解とする. このとき,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$  ならば

$$u_1^* \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} u(t, x) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t, x) \leq u_3^* \text{ for } x \geq 0.$$

*Proof.*  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$  なので,  $h(T) > (\pi/2)\sqrt{d/a}$  となるような  $T > 0$  が存在する. このとき, (IP) の解  $q_1$  が  $q_1(x; \ell) \leq u(T, x)$  in  $[0, \ell]$  と, いくらでも小さくなるように  $\ell \in ((\pi/2)\sqrt{d/a}, h(T)]$  をとることができる (time map 図 16 を参照). ここで,  $t \geq T$  に対して  $(u(T, x), h(T))$  を初期値とする (FBP) の解に Theorem 4 を適用すれば,  $v^*(x) \geq q_1(x; \ell)$  in  $[0, \ell]$  をみたま (SP) の最小の正値解が  $v^* \equiv u_1^*$  であることから,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty \text{ and } \liminf_{t \rightarrow \infty} u(t, x) \geq u_1^* > 0 \text{ for } x \geq 0. \quad (2.1)$$

次に,  $\bar{u} = \bar{u}(t)$  を常微分方程式

$$\frac{d}{dt} \bar{u} = f(\bar{u}); \quad \bar{u}(0) = \max \{|u_0|_{C[0, h_0]}, u_3^*\}$$

の解とする. このとき,  $\bar{u}$  は  $u$  の優解となり,  $[0, h(t))$  上で “通常と比較定理” を用いれば  $u(t, x) \leq \bar{u}(t)$  for  $t > 0, x \in [0, h(t)]$  である. さらに,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}(t) = u_3^*$  となるため,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t, x) \leq u_3^* \text{ for } x \geq 0. \quad (2.2)$$

以上, (2.1), (2.2) より結論の評価を得る. □

**Proposition 2.2.**  $(u, h)$  を (FBP) の解とする. このとき,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) < \infty$  ならば,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{d}{a}} \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |u(t, \cdot)|_{C[0, h(t)]} = 0.$$

*Proof.* Theorem 3 より,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) < \infty$  ならば次のことが成り立つ:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t, \cdot)|_{C[0, h(t)]} = 0. \quad (2.3)$$

したがって,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \leq (\pi/2)\sqrt{d/a}$ であることを示せばよい. 背理法で示すために, ある  $T > 0$  において  $h(T) > (\pi/2)\sqrt{d/a}$  が成り立つと仮定する. このとき, Proposition 2.1 の証明における議論と同様にして, (SP) の最小の正值解が  $v \equiv u_1^*$  であることに注意すれば Theorem 4 より  $\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t, x) \geq u_1^*$  なる評価を得ることができる. しかし, この評価は (2.3) に矛盾するので,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \leq (\pi/2)\sqrt{d/a}$  であることがわかる.  $\square$

幾つか表記を導入する.  $\mathcal{Z}(w)$  を  $\mathbb{R}$  上の連続関数  $w = w(x)$  の零点の数とし, とくに  $\mathcal{Z}_I(w)$  を区間  $I$  における  $w$  の零点の数とする. さらに,  $w$  の零点を 2 種類に分類する:

simple zero :  $x^*$  s.t.,  $w(x^*) = 0$  and  $w'(x^*) \neq 0$ ;

degenerate zero :  $x^*$  s.t.,  $w(x^*) = w'(x^*) = 0$ .

放物型方程式の解に対する零点の性質について, Angenent [1] によって重要な結果が得られている. その結果を用いることで Du-Matano [5] において,  $\mathbb{R}$  上の放物型問題の解の漸近挙動の択一定理が示された. その手法を (FBP) に対して拡張することによって Theorem I を示すことができる.

[1, Theorems A-D] を (FBP) に対して適用できるように, 区間  $I = I(t)$  の左端を斉次 Neumann 条件を課した固定端, 右端を時間  $t$  に依存した自由境界として改良したものを示すことができる (より一般の自由境界問題に対する定理は [4, 10] を参照):

**Lemma 2.1** (zero number properties).  $\xi(t)$  with  $\xi(t) > 0$  を  $(t_1, t_2)$  における  $C^1$  級の関数とし,  $I(t) := [0, \xi(t)]$  とする.  $w = w(t, x) \in C^{1,0}([t_1, t_2] \times I(t)) \cap C^{1,2}((t_1, t_2) \times I(t))$  with  $w(t, x) \neq 0$  は放物型方程式

$$w_t = dw_{xx} + c(t, x)w, \quad t \in (t_1, t_2), \quad x \in (0, \xi(t)) \quad (2.4)$$

および境界条件

$$w_x(t, 0) = 0, \quad w(t, \xi(t)) \neq 0 \quad \text{for } t \in (t_1, t_2)$$

をみたし, 係数関数  $c$  は  $[t_1, t_2] \times I(t)$  上で有界な関数とする. このとき, 各  $t \in (t_1, t_2)$  に対して関数  $x \mapsto w(t, x)$  の零点は  $I(t)$  内で集積しない. さらに,

- (i)  $\mathcal{Z}_{I(t)}(w(t, \cdot)) < \infty$  for any  $t \in (t_1, t_2)$  かつ  $t$  について非増加である.
- (ii)  $w(t^*, x^*) = w_x(t^*, x^*) = 0$  for some  $t^* \in (t_1, t_2)$ ,  $x^* \in I(t)$  ならば,

$$\mathcal{Z}_{I(t)}(w(t, \cdot)) > \mathcal{Z}_{I(t)}(w(s, \cdot)) \quad \text{for all } t \in (t_1, t^*), \quad s \in (t^*, t_2).$$

$I = [0, \infty)$  としても同様の主張が成り立つ.

Lemma 2.1 を用いることで, [5, Lemma 2.6] と同様にして次の結果を得る:

**Lemma 2.2.**  $w(t, x)$  を  $[t_1, t_2] \times [0, \infty)$  において方程式 (2.4),  $x = 0$  において  $w_x(t, 0) = 0$  for  $t \in [t_1, t_2]$  をみたす関数とし,  $\{w_n(t, x)\}_{n=1}^\infty$  を次のような関数列とする:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(t, x) = w(t, x) \text{ in } C^{0,1}([t_1, t_2] \times [0, \infty)).$$

このとき,  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  に対して関数  $x \mapsto w_n(t, x)$  が  $[0, \infty)$  に *simple zero* のみを持つならば, すべての  $t \in [t_1, t_2]$  に対して  $w(t, x) \equiv 0$  on  $[0, \infty)$ , または  $w(t, x)$  は  $[0, \infty)$  に *simple zero* のみを持つ.

Lemma 2.1 (zero number properties), Lemma 2.2 と  $\omega$ -極限集合を用いた手法 ([3] を参照) により, 次の命題を示すことができる (証明は省略):

**Proposition 2.3.**  $(u, h)$  を (FBP) の解とする. このとき,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$  ならば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, \cdot) = v^* \text{ locally uniformly in } [0, \infty).$$

ただし,  $v^*$  は (SP) の正定数解  $u_1^*$ ,  $u_2^*$ ,  $u_3^*$  もしくは単調減少な解  $v_{dec} = v_{dec}(x)$  である.

*Proof of Theorem I.* 自由境界  $h(t)$  は狭義単調増加である. したがって,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) < \infty$  または  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$  のどちらかが成り立つ. このことに注意して 2 つの Claim を示すことで, 定理を証明する.

**Claim 1:**  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) < \infty$  ならば **Vanishing** が起こる.  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) < \infty$  である場合, Proposition 2.2 より  $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t, \cdot)|_{C[0, h(t)]} = 0$ , すなわち Vanishing となる.

**Claim 2:**  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$  ならば **Small, Big** または **Middle spreading** が起こる.  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$  である場合, Proposition 2.3 により解の漸近挙動は (SP) の定数解  $v \equiv u_1^*, u_2^*, u_3^*$  または単調減少な解  $v_{dec}$  に限られる.  $v \equiv u_2^*$  が実現しないことを示す. 背理法によって示すために, 次のことを仮定する:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty \text{ and } \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = u_2^* \text{ locally uniformly in } [0, \infty). \quad (2.5)$$

さらに,  $v_{per} = v_{per}(x)$  を  $u_1^* < \min_{x \geq 0} v_{per}(x) < u_2^* < \max_{x \geq 0} v_{per}(x) = v_{per}(0) < \hat{u}^*$  なる (SP) の周期解とし, 新たな関数  $w$  を  $w(t, x) := u(t, x) - v_{per}(x)$  と定義してその零点の数  $\mathcal{Z}_{[0, h(t)]}(w(t, \cdot))$  を考える. Lemma 2.1 with  $I(t) = [0, h(t)]$  より  $\mathcal{Z}_{[0, h(t)]}(w(t, \cdot)) < \infty$  for  $t > 0$  である. しかし, (2.5) と  $v_{per}$  が  $u_2^*$  周りを振動することから,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_{[0, h(t)]}(w(t, \cdot)) = \infty$  となり矛盾が生じる. したがって,  $v \equiv u_2^*$  は実現しない. 以上より,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$  である場合には Small, Big または Middle spreading が起こる.  $\square$

## 2.2 漸近挙動に対する十分条件.

この小節では, 漸近挙動に対する十分条件 (Theorem II) の証明の概要を述べる.

Vanishing に対する十分条件 (i) の (a) は, 優解  $(V, H)$  を

$$H(t) := h_0(1 + \delta(1 - e^{-\alpha t})), \quad V(t, x) := V_0 e^{-\beta t} \cos\left(\frac{\pi x}{2H(t)}\right)$$

と構成し、比較定理 (Theorem 2) を用いることで結果を得る ([8, Theorem 2.2] を参照). また、正值関数  $V^* = V^*(x)$  は  $V^*(x) := V(0, x) = V_0 \cos((\pi/2)x/h_0)$  となる.

$h_0 < (\pi/2)\sqrt{d/a}$  における Spreading の十分条件 (i) の (b) は, [9, Proposition 4.8] と同様の対偶を用いた議論により示すことができる.

$h_0 \geq (\pi/2)\sqrt{d/a}$  ならば必ず Spreading が起こるという結果 (ii) は, Proposition 2.1 の証明において  $T = 0$  とすれば結論が従う.

$C$ -norm による Small spreading に対する十分条件 (ii) の (a) は, 常微分方程式

$$\frac{d}{dt}\bar{u} = f(\bar{u}); \quad \bar{u}(0) = |u_0|_{C[0, h_0]} < u_2^*$$

の解  $\bar{u} = \bar{u}(t)$  を優解として, “通常と比較定理” を用いれば示される.

$L^1$ -norm による Small spreading に対する十分条件 (ii) の (b) は, 初期値問題

$$\begin{cases} \bar{u}_t = d\bar{u}_{xx} + a\bar{u}, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ \bar{u}(0, x) = \bar{u}_0(x), \end{cases} \quad \bar{u}_0(x) := \begin{cases} u_0(|x|), & \text{for } |x| \leq h_0, \\ 0, & \text{for } |x| > h_0 \end{cases}$$

の解  $\bar{u} = \bar{u}(t, x)$  を優解として “通常と比較定理” を用いることで示すことができる ([3, Lemma 3.1] を参照).

最後に, Big spreading に対する十分条件 (iii) の証明の概要を述べる. (IP) の解について任意の  $\ell \geq \ell^*$  に対して  $q_2(0; \ell) > \hat{u}^*$  (time map 図 16 を参照) であるから, (SP) の解で  $v(x) \geq q_2(x; \ell)$  in  $[0, \ell]$  となるものは  $v \equiv u_3^*$  のみである. このことに注意すれば, Theorem 4 により結論を得る.

## 2.3 漸近挙動に対する閾値.

この小節では,  $(\sigma u_0, h_0)$  を初期値とする (FBP) の解について, パラメータ  $\sigma$  についての漸近挙動に対する閾値の存在定理 (Theorem III) の証明の概要を述べる.

$\sigma_1^* = \sigma_1^*(u_0, h_0)$  と  $\sigma_2^* = \sigma_2^*(u_0, h_0)$  を, それぞれ次のように定義する:

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &:= \sup \{ \hat{\sigma} : \text{Vanishing occurs for any } \sigma < \hat{\sigma} \}, \\ \sigma_2^* &:= \inf \left\{ \hat{\sigma} : h_0 \geq \max \{ (\pi/2)\sqrt{d/a}, \ell^* \} \text{ and Big spreading occurs for any } \sigma > \hat{\sigma} \right\}. \end{aligned}$$

Theorem II を用いることで, 各閾値の有界性や, 漸近挙動の依存性を証明できる.

*Remark 2.1.* 不等式  $(\pi/2)\sqrt{d/a} - \mu u_1^* |u_0|_{L^1(0, h_0)} / (d |u_0|_{C[0, h_0]}) \leq h_0$  が成り立つための必要条件は,  $|u_0|_{L^1(0, h_0)} < h_0 |u_0|_{C(0, h_0)}$  より,

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{d}{a}} \frac{d}{a + \mu u_1^*} < h_0 < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{d}{a}}.$$

すなわち, Theorem III で得られた結果は十分小さな  $h_0$  に対して  $\sigma_1^* = \infty$ ,  $\sigma_2^* = \infty$  を許す. ただし, 条件:  $\inf_{u>0} f(u)/u > -\infty$  を満たす positive bistable 型の反応項ならば,  $\sigma_1^* < \infty$ ,  $\sigma_2^* < \infty$  for any  $h_0 > 0$  なる結果が得られる ([3, Proposition 5.3] を参照).

### 3 漸近 Spreading speed について.

この節では (PB) を仮定し, Du-Lou [3] の手法を用いた漸近 Spreading speed に関する主結果 Theorems IV, V の証明の概要を述べる. [3] と同様の手法によって示すことのできる命題や補題の証明は省略する.

#### 3.1 Semi-wave の解析.

この小節では, (SWP) の解の存在定理 (Theorem IV) を phase-plane 上の軌道解析によって証明する. そのために, (SWP) から “ $\mu q_z(0) = c$ ” を除いた次の問題を考える:

$$\begin{cases} dq_{zz} - cq_z + f(q) = 0, & z > 0, \\ q(0) = 0, \quad q(\infty) = u^*, \quad q(z) > 0, & z > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

ただし,  $u^* = u_1^*$  or  $u_3^*$  とする.

$(c, q(z))$  が (3.1) を満たすとき,  $q(z)$  を speed  $c$  の Semi-wave と呼ぶことにする. 新たに未知関数  $p = p(z)$  を導入して, (3.1) の第一式を同値な連立微分方程式系に書き換える:

$$q' = p; \quad p' = \frac{1}{d}(cp - f(q)). \quad (3.2)$$

このとき (3.1) の解は, 点  $(0, \omega)$  with  $\omega := q'(0) \geq 0$  から出発して  $z \rightarrow \infty$  としたときに点  $(u^*, 0)$  に到達するような,  $qp$ -plane 上の (3.2) の解軌道  $(q(z), p(z))$  と一致する.

$p(z) = q'(z) > 0$  for all  $z > 0$  ならば, 軌道は関数  $p = P(q; c)$  with  $q \in [0, u^*]$  と表すことができ, この関数は

$$\frac{dP}{dq} \equiv P' = \frac{1}{d} \left( c - \frac{f(q)}{P} \right) \quad \text{for } q \in (0, u^*); \quad P(0; c) = \omega; \quad P(u^*; c) = 0 \quad (3.3)$$

をみatus.  $u^* = u_1^*$  としたときは  $P_S$ ,  $u^* = u_3^*$  としたときは  $P_B$  と表記する.

$c = 0$  かつ  $P(0; 0) = \omega_0 := \sqrt{(2/d) \int_0^{u^*} f(s) ds} > 0$  なる条件のもと (3.3) を解けば,  $P(q; 0) := \sqrt{(2/d) \int_q^{u^*} f(s) ds}$  for  $q \in [0, u^*]$ ;  $P'(u^*; 0) = -\sqrt{-f'(u^*)/d}$  が得られる.

$c \geq 0$  と仮定して, (3.2) の平衡点  $(u^*, 0)$  を考える. 相平面解析により  $(u^*, 0)$  が鞍点であることがわかり, このことから,  $q < u^*$  から  $(u^*, 0)$  に到達する (3.2) の軌道が 2 つ存在する. 一つは  $(u^*, 0)$  において傾き  $(c - \sqrt{c^2 - 4df'(u^*)})/(2d) < 0$  をとるもの (この軌道を  $T(c)$  と定義する) で, もう一方は傾き  $(c + \sqrt{c^2 - 4df'(u^*)})/(2d) > 0$  をとる. 今,  $P_S$  に対して  $Q_S \in [0, u_1^*)$  を,  $P_B$  に対して  $Q_B \in [0, u_3^*)$  を次のように定義する:

$$\begin{aligned} Q_S &= Q_S(c) := \inf\{\hat{q} \geq 0 : P_S(q; c) > 0 \text{ in } (\hat{q}, u_1^*)\}, \\ Q_B &= Q_B(c) := \inf\{\hat{q} \geq 0 : P_B(q; c) > 0 \text{ in } (\hat{q}, u_3^*)\}. \end{aligned}$$

とくに  $Q_S$  と  $Q_B$  を区別しない場合には  $Q$  と表記する. 点  $(Q, P(Q; c))$  は  $Q = 0$  ならば  $p$  軸,  $P(Q; c) = 0$  ならば  $q$  軸の正の部分に存在する.  $Q$  はいわば,  $(u^*, 0)$  から原点方向に

撃ち出される軌道  $P$  の墜落点の  $q$  座標である.  $T(c)$  の  $S := \{(q, p) : 0 \leq q \leq u^*, p \geq 0\}$  に存在する部分は,  $p = P(q; c)$  with  $q \in [Q, u^*]$  と表すことができる曲線で,

$$P'(q; c) = \frac{1}{d} \left( c - \frac{f(q)}{P(q; c)} \right) \quad \text{in } (Q, u^*)$$

および

$$P(u^*; c) = 0; \quad P'(u^*; c) = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4df'(u^*)}}{2d}$$

をみたす. 微分方程式から  $P'(Q; c)$  の符号を調べれば, 明らかに次のことが成り立つ:

$$Q_S = 0 \quad \text{and} \quad Q_B \notin (0, u_1^*) \cup (u_2^*, u_3^*] \quad \text{for any } c > 0. \quad (3.4)$$

また, 明らかに  $Q > 0$  ならば  $P(Q; c) = 0$  である.

表記の利便性のために,  $Q > 0$  である場合には  $P(q; c) \equiv 0$  for  $q \in [0, Q]$  と仮定し,

$$T_0(c) := \{(q, p) : p = P(q; c) \text{ for } q \in [Q, u^*], p = 0 \text{ for } q \in [0, Q]\}$$

と軌道を定義し直す. これにより,  $P(q; c)$  は  $q \in [0, u^*]$  に対して定義されることになる.

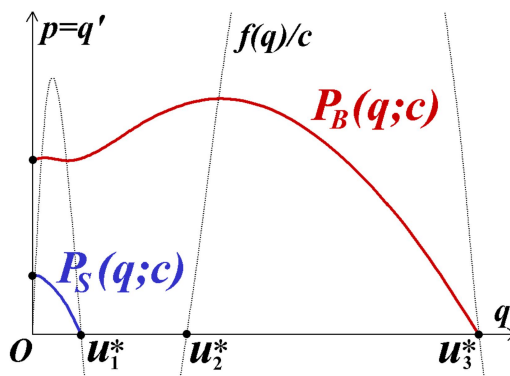


図 18:  $qp$ -phase plane.

十分小さな  $c$  における軌道  $P$  は次のような性質を持つ (証明は省略):

**Proposition 3.1.** 任意の  $c > 0$  に対して,  $P(q; c) < P(q; 0)$  for  $q \in (0, u^*)$ . さらに, 十分小さな  $c > 0$  に対して  $Q = 0$  and  $P(q; c) > 0$  in  $[0, u^*)$  である.

$c_0^S, c_0^B$  を次のように定義する:

$$\begin{aligned} c_0^S &:= \sup \Lambda_0^S, \quad \Lambda_0^S := \{\xi > 0 : P_S(q; c) > 0 \text{ in } [0, u_1^*) \text{ for all } c \in (0, \xi]\}, \\ c_0^B &:= \sup \Lambda_0^B, \quad \Lambda_0^B := \{\xi > 0 : P_B(q; c) > 0 \text{ in } [0, u_3^*) \text{ for all } c \in (0, \xi]\}. \end{aligned}$$

とくに区別しない場合には  $c_0$  と表記する. さらに,  $P_B$  に対して  $c_1^B, c_2^B$  を定義する:

$$\begin{aligned} c_1^B &:= \sup \Lambda_1, \quad \Lambda_1 := \{\xi > 0 : P_B(q; c) > 0 \text{ in } [u_1^*, u_3^*) \text{ for all } c \in (0, \xi]\}, \\ c_2^B &:= \sup \Lambda_2, \quad \Lambda_2 := \{\xi > 0 : P_B(q; c) > 0 \text{ in } [u_2^*, u_3^*) \text{ for all } c \in (0, \xi]\}. \end{aligned}$$

$c_0^S, c_0^B, c_1^B, c_2^B$  が有界であるという結果が得られる (証明は省略):

**Proposition 3.2.**  $c_0^S, c_0^B, c_1^B, c_2^B \in (0, 2\sqrt{ad}]$ .

$c$  について  $P(\cdot; c)$  は連続かつ単調に変化することと、軌道  $P(\cdot; c)$  の墜落点  $Q(c)$  の位置が  $c_0^S, c_0^B, c_1^B, c_2^B$  を境にどのように変化するかということが次の命題からわかる：

**Proposition 3.3.** 任意の  $0 \leq c_1 < c_2 < c_0$  と  $\bar{c} \geq 0$  に対して、 $P(q; c_1) > P(q; c_2) > 0$  in  $[0, u^*)$  and  $\lim_{c \rightarrow \bar{c}} P(\cdot; c) = P(\cdot; \bar{c})$  uniformly in  $[0, u^*]$ . さらに、次の (i)-(vi) が成り立つ：

- (i)  $P_S(0; c) = 0$  and  $P_S(q; c) > 0$  in  $(0, u_1^*)$  for all  $c \geq c_0^S$ ;
- (ii)  $c_0^B \leq c_1^B < c_2^B$ ;
- (iii) if  $c_0^B < c_1^B$ ,  $P_B(0; c) = 0$  and  $P_B(q; c) > 0$  in  $(0, u_3^*)$  for all  $c \in (c_0^B, c_1^B)$ ;
- (iv)  $Q_B(c_1^B) = u_1^*$ ;
- (v)  $Q_B(c) \in (u_1^*, u_2^*)$  for  $c \in (c_1^B, c_2^B)$ ;
- (vi)  $Q_B(c) = u_2^*$  for  $c \geq c_2^B$ .

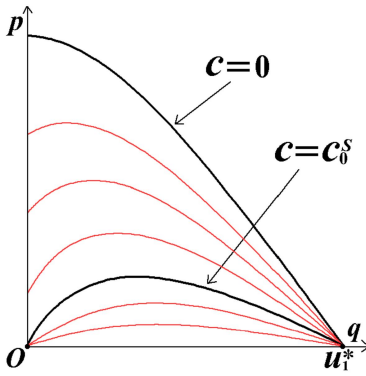


図 19:  $P_S(q, c)$

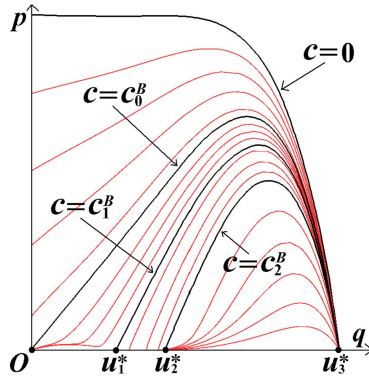


図 20:  $P_B(q, c)$ : Case A

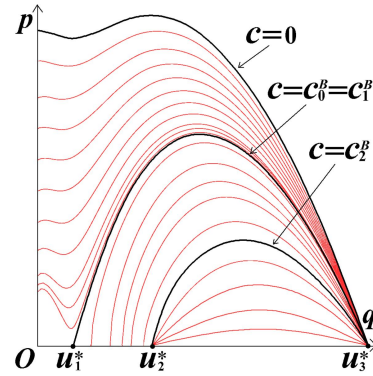


図 21:  $P_B(q, c)$ : Case B

*Proof.* 以下、幾つかの Claim を示すことで証明する。

**Claim 1:**  $P(q; c_1) > P(q; c_2)$  in  $[0, u^*)$  for any  $0 \leq c_1 < c_2 \leq c_0$  and  $\lim_{c \rightarrow \bar{c}} P(q; c) = P(q; \bar{c})$  uniformly in  $[0, u^*]$  for any  $\bar{c} \geq 0$ . [3, Lemma 6.1] と同様の議論により、結果が従う。

**Claim 2:** (i), (iii), (vi) が成り立つ。任意の  $c > 0$  に対して  $Q$  は (3.4) をみたすことと、 $c_0^S, c_0^B, c_2^B$  の定義から明らか。

**Claim 3:**  $Q_B(c_1^B) = u_1^*$  and  $Q_B(c) \in (u_1^*, u_2^*)$  for  $c \in (c_1^B, c_2^B)$ . [3, Lemma 6.1] の bistable 型の反応項と同様の議論により、結果が従う。

**Claim 4:**  $c_0^B \leq c_1^B < c_2^B$ .  $c_0^B, c_1^B, c_2^B$  の定義と  $P_B(q; c)$  の  $c$  についての単調性から明らかに  $c_0^B \leq c_1^B \leq c_2^B$  である。さらに、(iv) と  $c_2^B$  の定義から、明らかに  $c_1^B \neq c_2^B$  なので結論が成り立つ。  $\square$

$c$  を増加させたときに  $P(\cdot; c)$  の墜落点  $Q(c)$  の位置が単調に変化する。その際、 $P_B(\cdot; c)$  の墜落点  $Q_B(c)$  について次のような 2 つの Case が起こりうる：

**Case A :**  $c_0^B < c_1^B$ ; **Case B :**  $c_0^B = c_1^B$ .

Case A においては、 $(u_3^*, 0)$  から原点方向に撃ち出される軌道  $P_B(\cdot; c)$  が、 $q$  軸上の区間  $[u_1^*, u_2^*]$  に墜落することなく原点に墜落するような  $c \in (c_0^B, c_1^B)$  が存在する。Case B においては、 $c$  を増加させた際に  $P_B(\cdot; c)$  が原点に墜落するような  $c$  が存在せず、任意の  $c \geq c_0^B = c_1^B$  に対する  $P_B(\cdot; c)$  はすべて  $p$  軸上の区間  $[u_1^*, u_2^*]$  に墜落してしまう。

$P_S$  と  $P_B$  の大小関係に関して次の結果が得られる：



**Proposition 3.4.**  $P_S(q; c) < P_B(q; c)$  in  $[0, u_1^*]$  for  $c \in [0, c_1^B)$ . さらに,

$$\lim_{c \nearrow c_1^B} P_B(q; c) = P_S(q; c_1^B) \text{ uniformly in } [0, u_1^*]$$

であり, 次の Case A または B のいずれかが成り立つ:

$$\text{Case A: } c_0^S \leq c_0^B < c_1^B; \quad \text{Case B: } c_0^B = c_1^B \leq c_0^S.$$

*Proof.* 幾つかの Claim にわけて証明する.

**Claim 1:**  $P_S(q; c) < P_B(q; c)$  in  $[0, u_1^*]$  for  $c \in [0, c_1^B)$ .  $P_B(q; c) > 0$  in  $(0, u_3^*)$  for  $c \in [0, c_1^B)$  であることから,  $P_B(u_1^*; c) > 0 = P_S(u_1^*; c)$  for  $c \in [0, c_1^B)$  となる. このことと,  $P_S(\cdot; c)$  と  $P_B(\cdot; c)$  がともに同じ微分方程式をみたすことから, 結論を得る.

**Claim 2:**  $\lim_{c \nearrow c_1^B} P_B(q; c) = P_S(q; c_1^B)$  uniformly in  $[0, u_1^*]$ . [3, Lemma 6.1] と同様の議論により,  $[0, u_1^*]$  上にある関数  $R = R(q)$  が存在して,

$$\lim_{c \nearrow c_1^B} P_B(q; c) = R(q) \text{ uniformly in } [0, u_1^*]$$

が成り立ち,  $R$  は  $(0, u_1^*)$  上で次の方程式を満たす:

$$R'(q) = \frac{1}{d} \left( c_1^B - \frac{f(q)}{R(q)} \right) \quad \text{on } (0, u_1^*). \quad (3.5)$$

$Q_B(c_1^B) = u_1^*$  より,  $P_B(u_1^*; c_1^B) = 0$  となるので,

$$R(u_1^*) = \lim_{c \nearrow c_1^B} P_B(u_1^*; c) = 0. \quad (3.6)$$

Claim 1 より, 明らかに  $R(q) \geq P_S(q; c_1^B) > 0$  on  $[0, u_1^*)$  である. したがって,  $qp$ -plane with  $c = c_1^B$  上で (3.5), (3.6) をみたす正值関数は  $P_S(q; c_1^B)$  のみなので,  $R \equiv P_S(q; c_1^B)$  となる.

**Claim 3:**  $c_0^B < c_1^B$  ならば,  $c_0^S \leq c_0^B < c_1^B$ .  $c_0^B < c_1^B$  の場合, Claim 1 より  $P_S(0; c_0^B) \leq P_B(0; c_0^B) = 0$  となる. したがって  $P_S(0; c_0^B) = 0$ , 即ち  $c_0^S \leq c_0^B$  を得る.

**Claim 4:**  $c_0^B = c_1^B$  ならば,  $c_0^B = c_1^B \leq c_0^S$ . 背理法によって示すために,  $c_0^S < c_0^B (= c_1^B)$  として矛盾を導く. Claim 2 より,  $c' \in (c_0^S, c_0^B)$  を十分  $c_0^B$  に近い値になるようにとれば, ある  $\theta^* \in (0, u_1^*)$  において  $P_S(\theta^*; c_0^B) < P_S(\theta^*; c') < P_B(\theta^*; c') < P_S(\theta^*; c_0^S)$  が成り立つ. ここで, 区間  $[0, \theta^*]$  において  $P_B(q; c')$  が次のことを満たすことに注意する:

$$P'_B(q; c') = \frac{1}{d} \left( c' - \frac{f(q)}{P_B(q; c')} \right) \geq \frac{1}{d} \left( c_0^S - \frac{f(q)}{P_B(q; c')} \right) \quad \text{for } q \in (0, \theta^*].$$

この評価と  $P_B(\theta^*; c') < P_S(\theta^*; c_0^S)$  により, 区間  $[0, \theta^*]$  において曲線  $p = P_B(q; c')$  は曲線  $p = P_S(q; c_0^S)$  の下にとどまる. したがって,  $P_B(0; c') \leq P_S(0; c_0^S) = 0$  であることから  $P_B(0; c') = 0$  が成り立つ. しかし,  $c' < c_0^B$  より  $P_B(0; c') > 0$  なので矛盾が生じる. したがって,  $c_0^B \leq c_0^S$  であることがわかる.

**Claim 5:** Case A または B が成り立つ. Proposition 3.3 の (ii) より  $c_0^B \leq c_1^B$  であることと, Claims 3, 4 より結論が得られる.  $\square$

**Proposition 3.5.** 各  $\mu > 0$  に対して  $P_S(0; c_S^*) = c_S^*/\mu$  なる  $c_S^* = c_S^*(\mu) \in (0, c_0^S)$  が一意に存在し,  $c_S^*(\mu) \nearrow c_0^S$  as  $\mu \rightarrow \infty$  である. さらに, 次の Case A または B のいずれかが成り立つ:

**Case A:** 各  $\mu > 0$  に対して,  $P_B(0; c_B^*) = c_B^*/\mu$  なる  $c_B^* = c_B^*(\mu) \in (0, c_0^B)$  が一意に存在し,  $c_S^*(\mu) < c_B^*(\mu)$  かつ,  $c_B^*(\mu) \nearrow c_0^B$  as  $\mu \rightarrow \infty$  である.

**Case B:** 各  $\mu < \mu^* := c_0^B/P_S(0; c_0^B)$  に対して,  $P_B(0; c_B^*) = c_B^*/\mu$  なる  $c_B^* = c_B^*(\mu) \in (0, c_0^B)$  が一意に存在し,  $c_S^*(\mu) < c_B^*(\mu)$  かつ,  $c_B^*(\mu) \nearrow c_S^*(\mu^*)$  as  $\mu \nearrow \mu^*$  である.

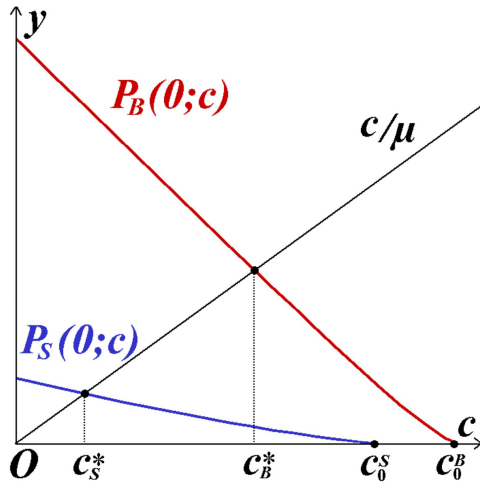


図 22:  $P(0; c)$ : Case A

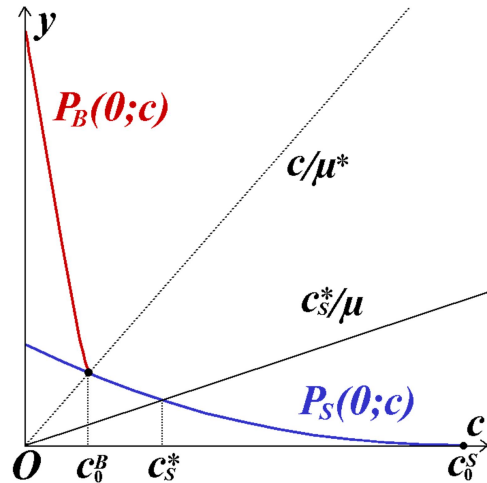


図 23:  $P(0; c)$ : Case B

*Proof.* 次のように 3 つの関数を定義する:

$$\xi_S(c) := P_S(0; c), \quad \xi_B(c) := P_B(0; c), \quad \zeta = \zeta(c; \mu) := \frac{c}{\mu}.$$

ここで,  $\xi_S(c)$  の定義域は  $c \geq 0$ ,  $\xi_B(c)$  の定義域は Case A の場合には  $c \geq 0$ , Case B の場合には  $c \in [0, c_0^B)$  であることに注意が必要である. 幾つかの Claim にわけて証明する.

**Claim 1:** 各  $\mu > 0$  に対して,  $P_S(0; c_S^*) = c_S^*/\mu$  なる  $c_S^* = c_S^*(\mu) \in (0, c_0^S)$  が一意に存在し,  $c_S^*(\mu) \nearrow c_0^S$  as  $\mu \rightarrow \infty$  である. Proposition 3.3 と  $c_0^S$  の定義から,  $P_S(0; c) > 0$  for  $c \in [0, c_0^S)$  かつ,  $c$  を  $[0, c_0^S)$  上で増加させたときに  $P_S(0; c)$  は連続に減少することがわかる.  $cy$ -plane における減少曲線  $y = \xi_S(c)$  と増加直線  $y = \zeta(c)$  について,  $\xi_S(0) = P_S(0; 0) > 0$ ,  $\xi_S(c_0^S) = P_S(0; c_0^S) = 0$  および,  $\zeta(0) = 0$ ,  $\zeta(c_0^S) = c_0^S/\mu > 0$  より,  $y = \xi_S(c)$  と  $y = \zeta(c)$  は区間  $(0, c_0^S)$  において交点  $(c_S^*, c_S^*/\mu)$  をただ一つ持つ. すなわち,  $c_S^* = c_S^*(\mu) \in (0, c_0^S)$  が一意に存在することがわかる.  $cy$ -plane 上で考えれば,  $c_S^*(\mu) \nearrow c_0^S$  as  $\mu \rightarrow \infty$  は明らかである (図 22, 23 を参照).

**Claim 2:** Case A ならば, 各  $\mu > 0$  に対して,  $P_B(0; c_B^*) = c_B^*/\mu$  なる  $c_B^* = c_B^*(\mu) \in (0, c_0^B)$  が一意に存在して,  $c_S^* < c_B^*$  かつ  $c_B^*(\mu) \nearrow c_0^B$  as  $\mu \rightarrow \infty$  である. Case A において,  $\xi_B$  の定義域は  $c \geq 0$  であることから, Claim 1 と同様の議論により任意の  $\mu > 0$  に対する  $c_B^*$  の一意性と収束性が従う. Proposition 3.4 より  $P_S(0; c) < P_B(0; c)$  for  $c \in [0, c_0^B)$  なので,  $\xi_S(c) < \xi_B(c)$  for  $c \in [0, c_0^B)$  となる. したがって,  $c_S^* < c_B^*$  である (図 22 を参照).

**Claim 3: Case B** ならば, 各  $\mu < \mu^* := c_0^B / P_S(0; c_0^B)$  に対して,  $P_B(0; c_B^*) = c_B^* / \mu$  なる  $c_B^* = c_B^*(\mu) \in (0, c_0^B)$  が一意に存在して,  $c_S^* < c_B^*$  かつ  $c_B^*(\mu) \nearrow c_S^*(\mu^*)$  as  $\mu \nearrow \mu^*$  である.  $(c_B^*, c_B^*/\mu)$  を  $c\eta$ -plane における減少曲線  $y = \xi_B(c)$  と増加直線  $y = \zeta(c)$  との交点とする. このとき,  $\xi_B(c)$  の定義域が  $c \in [0, c_0^B)$  であることに注意すれば, Claim 1 と同様の議論により,  $\mu < \mu^*$  であれば  $P_B(0; c_B^*) = c_B^* / \mu$  なる  $c_B^* = c_B^*(\mu) \in (0, c_0^B)$  が一意に存在する (図 23 を参照). また, Claim 2 と同様の議論により  $c_S^* < c_B^*$  for  $\mu < \mu^*$  であることがわかる. Proposition 3.4 より  $c_0^B = c_1^B$  であることに注意すれば  $\lim_{c \nearrow c_0^B} P_B(0; c) = P_S(0; c_0^B)$ , すなわち次のことが成り立つ:

$$\lim_{c \nearrow c_0^B} \xi_B(c) = \xi_S(c_0^B) = c_0^B / \mu^*.$$

したがって,  $c\eta$ -plane 上で考えれば  $c_B^*(\mu) \nearrow c_S^*(\mu^*)$  as  $\mu \nearrow \mu^*$  を得る.  $\square$

以下,  $c_S^*$  と  $c_B^*$  を区別しない場合には  $c^*$  と表記する.

*Proof of Theorem IV.* Proposition 3.5 より各  $\mu > 0$  に対する  $P(0; c^*) = c^* / \mu$  なる  $c^*$  の存在性が従う. (3.2) with  $c = c^*$  に一致する曲線  $p = P(q; c^*)$  with  $q \in [0, u^*)$  に対応する解を  $(q^*(z), p^*(z))$  with  $z \in [0, \infty)$  とすれば, これは  $qp$ -plane 上において  $p$  軸上の正則点  $(0, P(0; c^*))$  と  $q$  軸上の平衡点  $(u^*, 0)$  をつなぐ. したがって,  $(c^*, q^*)$  は (3.1) with  $q_z^*(0) = c^* / \mu$ , すなわち (SWP) の解となることがわかる.

次に,  $\mu$  に対する  $(c^*, q^*)$  の一意性を示す.  $(\hat{c}, \hat{q})$  を (SWP) のもう一つの解とすると, これは  $qp$ -plane 上の  $(0, \hat{c}/\mu)$  と  $(u^*, 0)$  を結ぶ  $S$  上の軌道 (3.2) と一致する. 各  $c \geq 0$  に対して  $(u^*, 0)$  に結合する正值軌道の一意性により, そのような軌道は  $p = P(q; \hat{c})$  with  $q \in [0, u^*)$  に一致する. このことから,  $P(0; \hat{c}) = \hat{c}/\mu$  となる. ここで, Proposition 3.5 より  $P(0; c) = c/\mu$  なる  $c$  は一意なので  $\hat{c} = c^*$  である. よって  $q = q^*$  も従うので,  $(c^*, q^*)$  の一意性が示される.  $\square$

以下, (SWP) with  $u^* = u_1^*$  の一意解を  $(c_S^*, q_S^*)$ , (SWP) with  $u^* = u_3^*$  の一意解を  $(c_B^*, q_B^*)$  と表記する.  $qp$ -plane 解析によって, 副産物として進行波解 (Traveling wave) の存在定理が得られる (証明は省略):

**Theorem VI (Traveling wave の存在).**  $c_0^S, c_0^B, c_1^B, c_2^B$  を上記で定義されたものとする. このとき, 楕円型問題

$$(TWP) \quad \begin{cases} dq'' - cq' + f(q) = 0, & z \in \mathbb{R}, \\ q(-\infty) = u_*, \quad q(\infty) = u^*, \quad q(z) > 0, & z \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

with  $(u_*, u^*) = (0, u_1^*)$  は  $c \geq c_0^S$  に対して一意解を持つ. さらに, 次の (i)-(iii) が成り立つ:

(i) Case A の場合, (TWP) with  $(u_*, u^*) = (0, u_3^*)$  は  $c \in [c_0^B, c_1^B)$  に対して一意解を持つ.

(ii) (TWP) with  $(u_*, u^*) = (u_1^*, u_3^*)$  は  $c = c_1^B$  に対して一意解を持つ.

(iii) (TWP) with  $(u_*, u^*) = (u_2^*, u_3^*)$  は  $c \geq c_2^B$  に対して一意解を持つ.

ただし, 上記の解の一意性は, 変数  $z$  についての平行移動を除いて考える.

### 3.2 漸近 Spreading speed の解析.

この小節では, Semi-wave を用いた漸近 Spreading speed に関する定理 (Theorem V) の証明の概要を述べる. 与えられた  $\mu > 0$  に対して (SWP) の解が存在するならば, [3, Lemma 6.5] と同様にして Semi-wave を利用して劣解を構成することで Spreading speed の下からの評価を得る (証明は省略).

**Lemma 3.1.**  $(u, h)$  を (FBP) の解とし, *Small (resp. Big) spreading* が起こるものとする. このとき, (SWP) with  $u^* = u_1^*$  (resp.  $u^* = u_3^*$ ) が解  $(c_S^*, q_S^*)$  (resp.  $(c_B^*, q_B^*)$ ) を持つならば,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)/t \geq c_S^*$  (resp.  $c_B^*$ ) である.

Lemma 3.1 の  $c_S^*$  による評価は, Big と Middle spreading に対しても成り立つ (Small spreading となる (FBP) の解を劣解とみなせば明らかに結論が従う):

**Corollary 3.1.**  $(u, h)$  を (FBP) の解とし, *Big* または *Middle spreading* が起こるものと仮定する. このとき, 任意の  $\mu > 0$  に対して  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)/t \geq c_S^*$  である.

$f$  に摂動を加えた Semi-wave を優解として用いることで, Spreading speed の上からの評価を得ることができる. その際, どのような摂動を  $f$  に加えればよいかを述べる.  $\hat{\theta}_S \in (0, u_1^*)$  を  $f$  が  $(0, u_1^*)$  上で最大値をとる点とし,  $\hat{\theta}_B \in (u_2^*, u_3^*)$  を  $f$  が  $(u_2^*, u_3^*)$  上で最大値をとる点とする. 十分小さな  $\varepsilon > 0$  に対して,  $f$  を幾つかの条件を満たすように修正した  $C^1$  級関数  $f_\varepsilon = f_\varepsilon(u; \varepsilon)$  を構成する. まず, (SWP) with  $u^* = u_1^*$  に対するものを  $f_\varepsilon^S(u)$  とする:

$$f_\varepsilon^S(u) \begin{cases} = f(u), & \text{for } u \in [0, \hat{\theta}_S] \cup [u_2^*, \infty), \\ > f(u), & \text{for } u \in (\hat{\theta}_S, u_2^*), \end{cases}$$

$$f_\varepsilon^S(u) = 0 \text{ has a unique solution } u_1^* + \varepsilon \text{ in } (\hat{\theta}_S, u_2^*),$$

$$(f_\varepsilon^S)'(u_1^* + \varepsilon) < 0, \quad f_\varepsilon^S \searrow f \text{ in the } C^1 \text{ norm over } [\hat{\theta}_S, u_2^*] \text{ as } \varepsilon \searrow 0.$$

次に, (SWP) with  $u^* = u_3^*$  に対するものを  $f_\varepsilon^B(u)$  とする:

$$f_\varepsilon^B(u) \begin{cases} = f(u), & \text{for } u \in [0, \hat{\theta}_B], \\ > f(u), & \text{for } u \in (\hat{\theta}_B, \infty), \end{cases}$$

$$f_\varepsilon^B(u) = 0 \text{ has a unique solution } u_3^* + \varepsilon \text{ in } (\hat{\theta}_B, \infty),$$

$$(f_\varepsilon^B)'(u_3^* + \varepsilon) < 0, \quad f_\varepsilon^B \searrow f \text{ in the } C^1 \text{ norm over } [\hat{\theta}_B, \infty) \text{ as } \varepsilon \searrow 0.$$

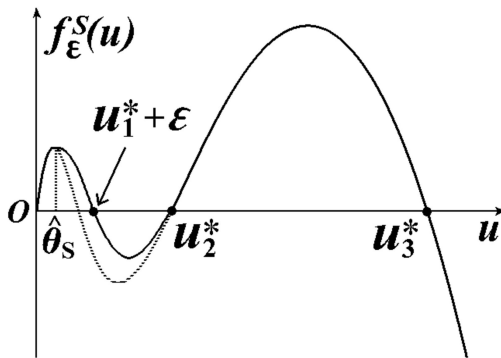


図 24:  $f_\varepsilon^S$  の概形

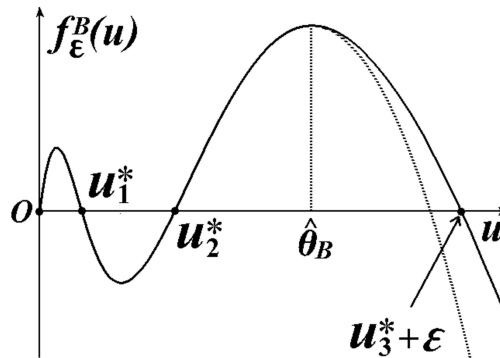


図 25:  $f_\varepsilon^B$  の概形

$f_\varepsilon^S$  と  $f_\varepsilon^B$  をとくに区別をしない場合には  $f_\varepsilon$  と表記する.  $f$  を  $f_\varepsilon$  と置き換えても, Theorem IV と同様の定理を得ることができる. 対応する Traveling wave と Semi-wave をそれぞれ  $(c_0^\varepsilon, q_0^\varepsilon(z))$ ,  $(c_\varepsilon^*, q_\varepsilon^*(z))$  と表記し, とくに  $u^* = u_1^*$  の場合に対応するものを  $(c_0^{\varepsilon,S}, q_0^{\varepsilon,S}(z))$ ,  $(c_{\varepsilon,S}^*, q_{\varepsilon,S}^*(z))$  とし,  $u^* = u_3^*$  の場合に対応するものを  $(c_0^{\varepsilon,B}, q_0^{\varepsilon,B}(z))$ ,  $(c_{\varepsilon,B}^*, q_{\varepsilon,B}^*(z))$  とする. このとき, 次の命題が成り立つ (証明は [3, Proposition 6.4] を参照).

**Proposition 3.6.**  $c_0^\varepsilon \geq c_0$ ,  $c_\varepsilon^* > c^*$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_0^\varepsilon = c_0$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon^* = c^*$ .

$(c_\varepsilon^*, q_\varepsilon^*(z))$  を優解として用いることで, Spreading speed の上からの評価が得られる (証明は省略).

**Lemma 3.2.**  $(u, h)$  を (FBP) の解とし, *Small (resp. Big) spreading* が起こると仮定する. このとき, (SWP) with  $u^* = u_1^*$  (resp.  $u^* = u_3^*$ ) が解  $(c_S^*, q_S^*)$  (resp.  $(c_B^*, q_B^*)$ ) を持つならば,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)/t \leq c_S^*$  (resp.  $c_B^*$ ) である.

Lemmas 3.1 と 3.2 は (SWP) が解を持つ場合にのみ適用できるが, Case B:  $c_0^B = c_1^B \leq c_0^S$  においては  $\mu > \mu^*$  に対して (SWP) with  $u^* = u_3^*$  は解を持たない. このとき, Small spreading に対する Semi-wave  $(c_{\varepsilon,S}^*, q_{\varepsilon,S}^*)$  を用いて優解を構成することで, 十分大きな  $\mu$  に対する Big spreading speed の上からの評価を示すことができる.

**Lemma 3.3.** *Case B* が成り立ち,  $\mu > \mu^*$  と仮定する. さらに,  $(u, h)$  を (FBP) の解とし, *Big spreading* が起こるものとする. このとき,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)/t \leq c_S^*$  である.

*Proof.* Big spreading となる (FBP) の解を  $(u_B, h_B)$  とし,  $u_1^* + \varepsilon \in (u_1^*, Q_B(c_S^*)) \subset (u_1^*, u_2^*)$  となるように十分小さく  $\varepsilon$  をとる.  $(c_{\varepsilon,S}^*, q_{\varepsilon,S}^*)$  は, 次の問題の一意解であることに注意:

$$\begin{cases} dq'' - cq' + f_\varepsilon^S(q) = 0, & z > 0, \\ q(0) = 0, \mu q'(0) = c, q(\infty) = u_1^* + \varepsilon, q(z) > 0, & z > 0. \end{cases}$$

次に,  $\eta = \eta(\varepsilon) \in (u_1^*, u_1^* + \varepsilon)$  をとり,  $q_{up}^* = q_{up}^*(z)$  を次の問題の解とする:

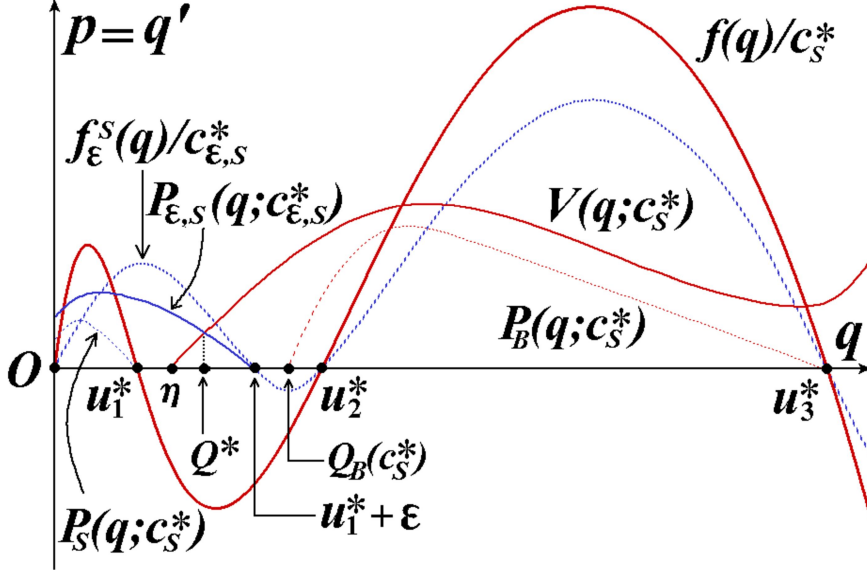
$$\begin{cases} dq'' - c_S^* q' + f(q) = 0, & z > 0, \\ q(0) = \eta, q'(0) = 0, q(z) > 0, & z > 0. \end{cases}$$

$\mu > \mu^* := c_0^B/P_S(0; c_0^B)$  であることから  $c_S^* \in (c_0^B, c_0^S)$  となる. したがって,  $\eta \in (u_1^*, Q_B(c_S^*))$  であるから,  $q_{up}^*$  は  $qp$ -plane 上で次の方程式を満たすような軌道に一致する:

$$V'(q; c_S^*) = \frac{1}{d} \left( c_S^* - \frac{f(q)}{V(q; c_S^*)} \right) \quad \text{in } (\eta, \infty); \quad V(\eta; c_S^*) = 0.$$

[3, Lemma 6.1] における bistable 型の反応項と同様の議論から  $V(u_3^*; c_S^*) > 0$  が従うので,  $\lim_{z \rightarrow \infty} q_{up}^*(z) = \infty$  である. ここで, 明らかに  $qp$ -plane 上の  $q = Q^* \in (\eta, u_1^* + \varepsilon)$  において  $p = P_{\varepsilon,S}(q; c_{\varepsilon,S}^*)$  と  $p = V(q; c_S^*)$  は交点  $(Q^*, P^*)$  を持つ. さらに, 次のような  $z_1^* > 0$  と  $z_2^* > 0$  が存在する:

$$q_{\varepsilon,S}^*(z_1^*) = q_{up}^*(z_2^*) = Q^* \quad \text{and} \quad (q_{\varepsilon,S}^*)'(z_1^*) = (q_{up}^*)'(z_2^*) = P^*.$$

図 26:  $qp$ -phase plane

Proposition 3.6 より任意の  $\varepsilon_0 > 0$  に対して  $\varepsilon > 0$  を  $c_{\varepsilon,S}^* \in (c_S^*, c_S^* + \varepsilon_0)$  となるように取り直すことができる. 十分大きな  $T > 0$  が存在して,  $u_B(t, x) < u_3^* + \varepsilon/2$  for  $t \geq T$  が成り立つ. 今,  $t \geq T$  に対して,  $(w, k)$  を次のように定義する:

$$k = k(t) := c_{\varepsilon,S}^* t + z_1^* + L,$$

$$w = w(t, x) := \begin{cases} q_{up}^*(k(t) - z_1^* + z_2^* - x), & x \in [0, k(t) - z_1^*], \\ q_{\varepsilon,S}^*(k(t) - x), & x \in [k(t) - z_1^*, k(t)]. \end{cases}$$

初等計算により, 次の結果を得る:

$$w_t = \begin{cases} c_{\varepsilon,S}^* (q_{up}^*)'(k(t) - z_1^* + z_2^* - x), & x \in [0, k(t) - z_1^*], \\ c_{\varepsilon,S}^* (q_{\varepsilon,S}^*)'(k(t) - x), & x \in [k(t) - z_1^*, k(t)], \end{cases}$$

$$w_x = \begin{cases} -(q_{up}^*)'(k(t) - z_1^* + z_2^* - x), & x \in [0, k(t) - z_1^*], \\ -(q_{\varepsilon,S}^*)'(k(t) - x), & x \in [k(t) - z_1^*, k(t)], \end{cases}$$

$$w_{xx} = \begin{cases} (q_{up}^*)''(k(t) - z_1^* + z_2^* - x), & x \in [0, k(t) - z_1^*], \\ (q_{\varepsilon,S}^*)''(k(t) - x), & x \in [k(t) - z_1^*, k(t)]. \end{cases}$$

ここで, 十分大きく  $L$  を取り直せば  $w(t, 0) = q_{up}^*(c_{\varepsilon,S}^* t + L + z_2^*) > u_3^* + \varepsilon/2$  for  $t \geq 0$  が成り立つ.  $(w, k)$  は  $(T, \infty) \times [0, k(t)]$  上で (FBP) の優解となる. 実際,

$$w_t - dw_{xx} - f(w)$$

$$\begin{cases} \geq c_S^* (q_{up}^*)' - d(q_{up}^*)'' - f(q_{up}^*) = 0 & \text{for } x \in [0, k(t) - z_1^*], \\ \geq c_{\varepsilon,S}^* (q_{\varepsilon,S}^*)' - d(q_{\varepsilon,S}^*)'' - f_{\varepsilon}^S(q_{\varepsilon,S}^*) = 0 & \text{for } x \in [k(t) - z_1^*, k(t)], \end{cases}$$

$$w(t, 0) > u_3^* + \varepsilon/2 > u_B(t, 0) \text{ for } t > T, \quad w(t, k(t)) = q_{\varepsilon,S}^*(0) = 0,$$

$$k'(t) = c_{\varepsilon,S}^* = \mu(q_{\varepsilon,S}^*)'(0) = -\mu w_x(t, k(t)).$$

ただし,  $x = 0$  における条件として  $w_x(t, 0) \geq 0$  ではなく  $w(t, 0) > u_B(t, 0)$  for  $t \geq T$  を採用している. ここで,  $T$  に対して十分大きく  $L > 0$  を取り直せば,  $h_B(T) < c_{\varepsilon, S}^* T + z_1^* + L = k(T)$  and  $u_B(T, x) < u_3^* + \varepsilon/2 < q_{up}^*(c_{\varepsilon, S}^* T + z_2^* + L - x) = w(T, x)$  for  $x \in [0, h(T)]$  が成り立つ. このことから, 比較定理 (Theorem 2) より,  $h_B(t) \leq c_{\varepsilon, S}^* t + z_1^* + L < (c_S^* + \varepsilon_0)t + z_1^* + L$  for  $t \geq T$  and  $u_B(t, x) \leq w(t, x)$  for  $t \geq T, x \in [0, h(t)]$  が成り立つ. よって,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h_B(t)/t \leq c_S^* + \varepsilon_0$  を得る. ここで,  $\varepsilon_0$  は任意に小さくとることができるので, 結論の評価を得る.  $\square$

$(c_{\varepsilon, S}^*, q_{\varepsilon, S}^*)$  を優解として用いることで, Middle spreading の漸近 Spreading speed の上からの評価が得られる (証明は省略):

**Lemma 3.4.** *Middle spreading が起こるならば,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)/t \leq c_S^*$  である.*

*Proof of Theorem V.* まず, Small spreading が起こる場合, Theorem IV より任意の  $\mu > 0$  に対して (SWP) with  $u^* = u_1^*$  は解を持つ. したがって, Lemmas 3.1 と 3.2 を適用することができ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)/t = c_S^*$  for  $\mu > 0$  を得る.

Big spreading が起こる場合, Theorem IV より Case A ならば任意の  $\mu > 0$ , Case B ならば  $\mu < \mu^*$  に対して (SWP) with  $u^* = u_3^*$  は解を持つ. したがって, Lemmas 3.1 と 3.2 を適用することができ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)/t = c_B^*$  を得る. Case B かつ  $\mu > \mu^*$  の場合は, Corollary 3.1 と Lemma 3.3 を適用すれば  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)/t = c_S^*$  を得る.

Middle spreading が起こる場合, Corollary 3.1 と Lemma 3.4 を適用することができ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)/t = c_S^*$  を得る.

最後に Proposition 3.5 より,  $c_S^*$  と  $c_B^*$  の大小関係と収束に関する結果が証明される.  $\square$

## 4 考察.

この節では, 数値実験結果等から考察される推測および, 未解決の問題を述べる.

**Case A と B について.** Theorem IV, V の Case A と B について, 反応項  $f$  の形状によってどちらが実現するかが決まると推測される. 本研究はトウヒノシントメハマキガの生態系モデルを出発点として進められてきた. その生態系モデルにおける反応項 (1.3) においては Case B のみ確認できている. Case A が成り立つような positive bistable 型の反応項として,  $f(u) := -u(u-1)(u-2)(u-3.2)(e^u - 0.99)$  が挙げられる (図 27 を参照). 区間  $[0, u_1^*]$  と  $[u_2^*, u_3^*]$  におけるグラフの山の大小関係が重要であると思われるが, 具体的に反応項が満たすべき十分条件は得られていない.

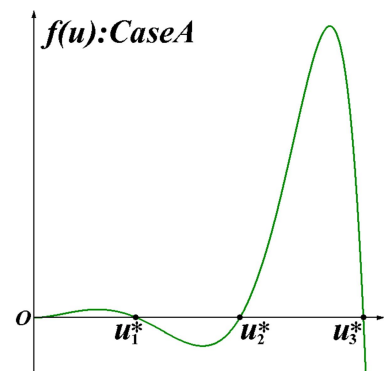


図 27: Case A

**Big step spreading とその漸近形状について.** Case B において Big spreading が起こる場合に,  $\mu < \mu^*$  の場合には図 8 のような通常の形状をとるが,  $\mu > \mu^*$  の場合には図 28 のような階段状の形になる. これを Big step spreading と呼ぶことにする. Big step spreading の漸近 Spreading speed は Small spreading のものと一致する. 通常, Spreading となる解  $u$  の漸近形状は, 対応する Semi-wave の形状をとる. しかし, Big step spreading に対応する Semi-wave を構成することはできない. したがって, その全体の漸近形状を得

ることはできないが、部分的な漸近形状を得ることができると推測できる。この数値実験は、個体群の中の切込み部隊ともいえるべき先陣が先に領域を開拓・拡散し、あとから本群が押し寄せてくるような拡散現象が実自然界でも起こりうることを示唆する、大変興味深いものである。

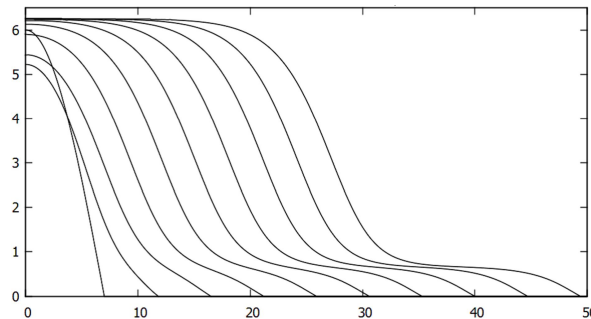


図 28: Big step spreading ( $\mu > \mu^*$ )

## 参考文献

- [1] S. Angenent, *The zero set of a solution of a parabolic equation*, J. Reine Angew. Math., **390** (1988), pp. 79-96.
- [2] Y. Du and Z. G. Lin, *Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary*, SIAM J. Math. Anal., **42** (2010), pp. 377-405.
- [3] Y. Du and B. Lou, *Spreading and vanishing in nonlinear diffusion problems with free boundaries*, J. Eur. Math. Soc. (in press).
- [4] Y. Du, B. Lou and M. Zhou, *Nonlinear Diffusion Problems with Free Boundaries: Convergence, Transition Speed and Zero Number Arguments*, preprint.
- [5] Y. Du and H. Matano, *Convergence and sharp thresholds for propagation in nonlinear diffusion problems*, J. Eur. Math. Soc., **12** (2010), pp. 279-312.
- [6] Kuo-Chih Hung and Shin-Hwa Wang, *A theorem on S-shaped bifurcation curve for a positone problem with convex-concave nonlinearity and its applications to the perturbed Gelfand problem*, J. Differential Equations, **251** (2011), pp. 223-237.
- [7] Y. Kaneko, *Spreading and vanishing behaviors for radially symmetric solutions of free boundary problems for reaction-diffusion equations*, Nonlinear Anal. Real World Appl., **18** (2014), pp. 121-140.
- [8] Y. Kaneko, K. Oeda and Y. Yamada, *Remarks on spreading and vanishing for free boundary problems of some reaction-diffusion equations*, Funkcial. Ekvac., **57** (2014), pp. 449-465.
- [9] Y. Kaneko and Y. Yamada, *A free boundary problem for a reaction-diffusion equation appearing in ecology*, Adv. Math. Sci. Appl., **21** (2011), pp. 467-492.
- [10] X. Liu and B. Lou, *Asymptotic behavior of solutions to diffusion problems with Robin and free boundary conditions*, Math. Model. Nat. Phenom., **8** (2013), no. 3, pp. 18-32.
- [11] D. Ludwig, D. G. Aronson and H. F. Weinberger, *Spatial Patterning of the Spruce Budworm*, J. Math. Biol., **8** (1979), pp. 217-258.
- [12] D. Ludwig, D. D. Jones and C. S. Holling, *Qualitative analysis of insect outbreak systems: The spruce budworm and forest*, J. Anim. Ecol., **47** (1978), pp. 315-332.
- [13] J. Smoller and A. Wasserman, *Global Bifurcation of Steady-State Solutions*, J. Differential Equations, **39** (1981), pp. 269-290.
- [14] Shin-Hwa Wang and Tzung-Shin Yeh, *S-shaped and broken S-shaped bifurcation diagrams with hysteresis for a multiparameter spruce budworm population problem in one space dimension*, J. Differential Equations, **255** (2013), pp. 812-839.